MEDITATIONUM MATHEMATICARUM

SECUNDA,

HISTORIOLAM ET CALCULUM IMAGINARII PROPONENS,

QUAM

PERMISSU AMPLISS. FAC. PHILOS. LUNDENS.

PUBLICE DEFENDENT

CAROLUS JOHANN. D:ˢ HILL,

MATH. PROF. REG. ET ORD.

ET

FRIDERICUS WÅNGENBERG,

OSTROGOTHI.

IN AUD. MAJ. DIE XXI DECEMBRIS MDCCCXXXI.

P. II.

LONDINI GOTHORUM,

EX OFFICINA BERLINGIANA,

MDCCCXXXI.

Parentibus Optimis

Filius.

Stads-Casseuren

Högädle

Herr **Gustaf Steffen,**

samt

Högädla

Fru **Helena Brigitta Steffen,**
född **Roth,**

tacksamt och vördnadsfullt

af

Fredric Wångenberg.

corollarium, *quamcunque functionem Algebraicam integram in factores secundi ordinis reales resolvi posse;* vi theorematis nempe, radices, si vel imaginariæ sunt, ad formam $p+iq$ reduci possunt; deinde ex theoremate alio judicatur, semper radicem $p-iq$ radicem $p+iq$ comitari; ex quibus componitur factor $(x-p-iq).(x-p+iq)$ $=\overline{x-p}^2+q^2$ realis *5). Hoc vero corollarium in calculo sublimiori maximi est usus, cum illius ope demonstrari possit, nullum differentiale rationale, ut (docente JOH. BERNOULLI *6) integretur, alias transcendentes functiones, quam Logarithmum & arcum Circularem, postulare. Quare omnes fere Geometræ in hoc demonstrando maximam posuerunt operam. Hoc ipsum de functione $x^{2n}+ax^n+b$ demonstrarunt CÔTES, MOIVRE, BERNOULLI, HERMANNUS & MANFREDI *7), & de hac $x^{4n}+ax^{3n}+bx^{2n}+cx^n+d$ Côtesii sodalis SMITH *8). — Generalem vero istius corollarii demonstrationem primus se tentasse indicavit EULERUS *9), D'ALEMBERT vero suam primus in vulgus edidit *30); uterque simul theorema illud universale tractavit *1). Postmodum cel. LA PLACE *2) elegantem algebraicam, & GAUSS *3) plures magis minusque prolixas dedit ejusdem demonstrationes. Idem et CAUCHY *4) de radicibus cujuscunque functionis demon-

---

*5) Mem. de Berlin 1746, p. 190.

*6) Mem. de l'Ac. de Paris, an. 1702. — MONTUCLA III, p. 147. — Mem. de Berl. 1746, p. 182.

*7) Montucla III, p. 148 & sq. Mem. de Berl. 1746, p. 182. Resoluta ista æquatio *theorematis* CÔTESIANI nomine vulgo celebratur, cujus & Cel. F. W. HERSCHEL haud spernendas (in Phil. Trans. 1813, p. 8) dedit applicationes.

*8) CÔTES Harmonia Mensurarum (comment.).

*9) MISCELL. Berol., T. VII. Mem. de Berl. 1746, p. 183; ipsam demum protulit in Mem. de Berl. 1749, p. 263.

*30) l. c. 1746, p. 189, sq.

*1) l. c., p. 183 & ibid. 1749, p. 264.

*2) Journ. de l'Éc. Norm., T. II, p. 315, ex LACROIX Anfangsgr. der Alg. üb. von HAHN, 2 Th., p. 50. OHM Syst. der Math., II, p. 178, sq.

*3) Geometricam 1799, Analyticas duas 1814 & (demonstratio nova altera theorematis &c. Gött.) 1816.

*4) Journ. de l'École polytechnique, T. XI, p. 411-16. — Demonstrandi modus, quo Cel. CAUCHY usus est, maximam analystarum mereri attentionem nobis videtur. Hic ita procedit: sit $fx=o$ æquatio data, cui,

strare docuit. Præterea hujus demonstrationis historiam concinne exposuit LA GRANGE (res. des Eq., p, 192-201). — Hoc loco forsan & observandum, nos arduam illam de radicum imaginariarum numero quæstionem non tam huc quam ad æquationum theoriam referendam censere.

Alterum theorema de imaginario, forsan primo loco ponendum, hoc est: *Nullum imaginarium cum reali confundi posse.* Quod omnes semper cum successu demonstrarunt; quos inter Comitem RICCATI *5) & Cel. FONTANA *6) nominasse sufficiat. Hoc theorema ad quantitates diversas uno calculo jungendas, tandemque ipsas iterum separandas quam maxime conducit. Hoc etiam momento maximus calculi imaginarii usus nititur: ejus enim adminiculo æquationes, quæ alias separatim pertractandæ essent, junctim absolvuntur; nec non quam plurimæ calculi ambagines, alio modo vix tra-

---

num radix imaginaria conveniat, inquirendum est. Ponatur $f(u+iv)$ explicite transmutari in $=P+\iota Q=Re^{i\alpha}$; augeanturque u & v incrementis h & k, quo ipso P & Q, ideoque & $P^2+Q^2=R^2$, mutabuntur in P_1 & Q_1 atque $R_1{}^2$. Posito vero $\tau^2=h^2+k^2$, ostendit, novum ipsius R^2 valorem $R_1{}^2$ formam $R^2+2RR_n\tau^nC\beta+=R^2+\triangle(R^2)$ recepturum fore: ubi β angulus, cui valorem quemlibet tribuere liceat, dummodo ratio $h : k$ alia atque alia capiatur. Tribuendo vero ipsis h & k valores minimos, signum ipsius $\triangle(R^2)$, cum ita τ qnam minimum efficiatur, a primo termino $2RR_n\tau^nC\beta$ dependebit; huic vero, angulum β rite determinando, signum quodvis tribuere licet, ideoque R^2 neque maximum neque minimum esse potest, nisi forte $R^2=o$ fuerit, quo scilicet casu primus ipsius $\triangle(R^2)$ terminus valens non est $2RR_n\tau^nC\beta$, sed potius forma $\tau^{2n}R_n{}^2a^2$. Si igitur nihilominus demonstrari potest, ipsi R^2 valorem minimum competere, hanc $R^2=o$ fore, simulque $P=o$ & $Q=o$, ideoque $f(u+iv)=o$, sequatur, necesse est. — Hanc vero demonstrationem unice exinde, quod $R^2=\infty$, accipiendo scilicet h vel $k=\infty$, efficere liceat, petit, qua quidem de re sententiam suam alio loco (Lehrb. der Algebraischen Anal. übers. v. HUZLER 1828, p. 227) fusius exposuit. Doctrinæ vero fundamenta, quibus integram hanc demonstrationem superstruxit, haud ita diversa sunt ab iis, quibus Cel. LE GENDRE utitur (Théorie des Nombres, P. I, §. 14).

*5) Mem. de Math. e. Ph. della Societa Ital. IV, p. 116, sq. Nova acta Petr., T. VIII (1790), p. 172.

*6) Miscell. Soc. Taur., T. VIII, P. I, p. 174 (Reuss).

ctandæ, nullo fere negotio expediuntur. Hac vero de re plura in posterum dicenda. Ex hoc altero theoremate illa sequitur propositio, cujus jam mentionem fecimus, *radices* $a+ib$ *&* $a-ib$ *se invicem semper comitari.*

Tertium demum imaginario indiderunt significatum, eumque Geometricum. Dominus H. KÜHN, si constructores casus irreducibilis exceperis, primus quanta imaginaria, ex solutione æquationis quadraticæ & cubicæ oriunda, construxisse sibi est visus. Me vero judice, ea non nisi Geometrice contemplatus est, illisque plus justo realitatis tribuit *7). Deinde BUÉE *8) veram atque genuinam imaginarii explicationem in Geometria invenire sibi est visus, idque pro *perpendicularitatis nota* habuit. Idem postmodum & ARGAND *9) & FRANÇOIS *10) proposuerunt, nullo horum, ut videtur, alterius opus cognoscente. Quoniam nostrum est propositum, theoriam imaginarii abstractam & mere analyticam tradere, ideoque in ipsa tractatione nullus dabitur locus ejus significatum Geometricum explicandi; e re sane erit, heic & nonnullorum horum virorum & nostram sententiam breviter indicare. BUÉE hunc fere in modum procedit. Primum observat, signa + & — duplici sensu adhiberi: I) eo, quo operationes Arithmeticas sibi oppositas indicant; II) eo, quo qualitates oppositas significant. Hi vero sensus simul haud adhiberi posse, censet! — Deinde dicit, signum $\sqrt{-1}$ neque +, neque —, neque o, indicare posse, sed tantummodo distantiam ab $+x$ atque ab $-x$ æqualem notare, ex quo consequatur, illud nihil nisi *notam perpendicularitatis* ("le signe de la perpendicularité") fore, ideoque nudam indicare operationem Geometricam; figurate tamen qualitatem omnino diversam ("une qualité toute differente") significare posse, concedit. — Multa præclara insuper at-

---

*7) Novi Comment. Petrop., T. III, p. 170-223; prolixissime! negat (p. 176) $\sqrt{-1}$ esse aliquid mere imaginarium, impossibile & inassignabile; (p. 190) suas radicum expressiones nimis esse compositas ipse confitetur; de hoc Kühn vide Mont. l. c., p. 30.

*8) Mem. sur les quant. imag. in Philos. Trans. J. 1806, p. 23, sq.

*9) Gergonne An. d. Math., T. IV, p. 133-149.

*10) l. c., p. 61.

tulit: Ex. gr. $+ia-ia$ qualitatis negationem, $o.a$ vero quantitatis significare. Interdum vero aliqua habet, quibus haud temere subscriberemus; ex. gr. cum ejusmodi venditat formulas: $i^n = \pm n.i$, $i^n = \frac{n}{2}.\left(e^{\frac{1}{2}\pi i} - e^{-\frac{1}{2}\pi i}\right)$, easque pro quocunque ipsius n valore locum habere, dicit; i vacuum significare posse, vel etiam lineæ latitudinem &c. Postremum tamen ut modus imaginarius, quo problemata alias impossibilia construantur, spectari potest. François rationem & magnitudinis & situs significandam censet, ideoque signo a_α lineam indicat, cujus longitudo est a, quæque cum axe quodam principali angulum $=\alpha$ facit. Ex quo aperte consequitur, $a_o = +a$, & $a_\pi = -a$; has vero inter ambas sibique invicem oppositas linea media & magnitudine & positione est illa axi perpendicularis $= \sqrt{(+a).(-a)} = ia = a_{\frac{1}{2}\pi}$ ponenda; quare i nota perpendicularitatis evadit. Hæc ille, & reliqui eodem fere tendunt. Cel. vero de Foncenex *1) in sua imaginarii consideratione negat, radices imaginarias Geometrice construi posse, quandoquidem nulla contradictio tolli possit. Generatim vero cum quæstionem Geometricam tractaveris, ex. gr. puncti cujusdam in linea data a dato puncto distantiam ex conditione quadam quæsiveris, inveneris que $x = a + ib$, ejusmodi quid exinde scire forte optes, quale ex solutione, $x = -a$, jam noveris. Hæc scilicet indicat, te ab initio false supposuise punctum quæsitum ex. gr. dextrorsum situm esse, cum tamen revera sinistrorsum sit; vel generatim, si ad numeros regressus fueris, ejusmodi solutio non modo aliquam problematis, qua talis, impossibilitatem, sed etiam conditionem indicat vel mutationem quæstioni subeundam, qua possibilis fiat *2). Similiter ex imaginaria solutione $x = a + ib$, constat, te ab initio false supposuisse, punctum quæsitum

---

*1) Phil. Trans. 1826, p. 83.

*2) Sic ex. gr. si quæsiveris, quisnam numerus (x) dyadi addendus sit, ut hæc unitas evadat $(x+2=1)$, reperies $x=-1$, quæ solutio nullum dari numerum taliter addendum, indicat; quare si veram voluisti additionem, impossibile quid petiisti; sin vero algebraicam, res ipsa fieri potest, vel potius quæstio juste mutata ita sonabit: quis numerus a dyade subtrahendus est, ut unitas supersit?

in data linea inveniri, cum tamen neque dextrorsum, quod $x=+a$, neque sinistrorsum, quod $x=-a$, neque in medio seu ipso origine, quod $x=o$ indicaret, situm esse possit. Ejusmodi igitur solutio imaginaria indicabit, vel tale punctum, si constat illud in data ipsa linea omnino esse debuisse, omnino non dari, vel etiam illud non in linea data sed extra hanc in plano vel etiam in spatio esse quærendum. Merito ideo secundo casu hoc problema iterum suscipiendum, jamque in exordio quærendum esset, non modo, quousque (nempe ad distantiam x ab origine) in data linea progrediendum, ut quæsito puncto proximi simus, sed etiam quantum $(=y)$ ab hac linea discedendum sit, ut punctum quæsitum attingamus. At vero hac in re memorabile est, quod solutio imaginaria non modo primam nostram falsam positionem indicabat, sed etiam duo dabat quanta determinata a & b; juste igitur quæri potest, numne his jam calculatis quantis a & b uti liceat ad nova ignota x & y invenienda, ideoque novo hoc calculo supersedere possimus; — eodem modo ac in altera illa solutione $x=-a$, tantum opus est, ut directionem oppositam ipso ignoto tribuamus, quod per $\overline{x}$ indicare lubet, quo statim habemus veram solutionem: $\overline{x}=a$. Et omnino simile quid in imaginaria solutione contingit: habemus nempe statim $x=a$ & $y=b$, i. e. utrasque ipsius ignoti puncti coordinatas ex calculo jam facto, etsi falsa positione superstructo, definitas. — Utraque nempe ambarum harum æquationum, ex unica hac $x-a+i(y-b)=o$, illis æquivalente, ope theorematis secundi universalis statim consequitur. Totus igitur in primo calculo commissus error in eo versatur, quod ab initio $y=o$ (i. e. punctum quæsitum in data linea) posuerimus, cum tamen $y=b$ sit. — Si igitur quærimus, quantum $(=x)$ punctum C a puncto A distet utut in linea AB situm, invenimusque $x=a+ib$; hoc indicat punctum C in recta AB haud jacere; quare, si tamen ejusmodi punctum datur, ABC triangulum esse debet. Sumamus vero $AB=a$, & erigamus perpendiculum $BC=b$, quo triangulum ABC rectangulum fit, & C punctum quæsitum erit; quæsitaque distantia erit $=\sqrt{a^2+b^2}=r$, haud quidem in proposita linea AB sed in altera $AC(=r)$, quæ cum illa angulum $BAC=\alpha$, cujus Tang. $(\alpha)=\frac{b}{a}$, constituit. Ex

inventis igitur quantitatibus a & b in problemate vere ignota quanta r & α definiuntur. Hæ vero formulæ conspirant cum transformatione in posterum proponenda, qua $a+ib=r(C\alpha+iS\alpha)=r.e^{i\alpha}$ evadit; quod etiam notationi $=r_\alpha$, qua François utitur, æquivalet; quæ igitur complectitur non modo r & α, sed etiam $a(=rC\alpha)$ & $b(=rS\alpha)$, quæ ita simul construuntur. Si tandem in linea AB distantiam sumserimus quamcunque $AD=x$, habebimus triangulum obliquangulum ACD, cujus tertium latus $CD=z$, si quadratur, productum radicum imaginariarum repræsentat. Est scilicet $z^2 = b^2+\overline{x-a}^2=(x-a-ib).(x-a+ib)=x^2-2xrC\alpha+r^2$; quod si nihilo æquale posueris (quo ipso & punctum C in linea AB inveniri admisisti), eadem tibi exorietur æquatio, cujus ope x definiebatur. Hæc breviter indicata analogia inter triangulum formulamque imaginariam $a+ib$ fundamentum nobis videtur omnis genuinæ imaginarium Geometrice considerandi artis, quam tamen, cum genuinam imaginarii nudi ideam inde explicare haud valeamus, in præsenti persequi haud lubet. Potius vero id, quod jam obiter de imaginaria illa solutione monuimus, analyticam imaginarii significationem genuinamque explicationem suppeditat, ut mox videbis.

Hæc jam præcipua theoriæ imaginarii sunt momenta, quorum historiolam breviter delineare voluimus. — Generales insuper de imaginario considerationes, easque magis minusve methaphysicas, proposuerunt Playfair *3) & Woodhouse *4), quorum ille præcipue adversus dubia a D:no Mazêres prolata disseruit, hic vero, imaginarias functionum trigonometricarum expressiones notissimas nihil nisi series infinitas Arithmeticas repræsentare contendit, quas igitur per has expressiones designatas vult. Singularia præterea theoriæ imaginarii capita plurimi tractarunt viri spectatissimi *5),

*3) Philos. Transact. f. t. J. 1778, p. 318. Mont. III, p. 284.

*4) Philos. Transact. f. t. J. 1801, p. 85-89.

*5) Interdum antiquæ quæstiones recoctæ sunt. Bouvier controversiam de Logarithmis numerorum negativorum (in Féruss. Bull. des Sc. Mathem. 1824 Maj., 342^{σ}, ex Gerg. An. Math. XIV Mars., 24^{σ}) resuscitare voluit, contendens $L(-a)=L(+a)$. Id, quod exinde petit, quia Lx per seriem tantummodo x^2 continentem exprimere licet; quæ argumentatio

quorum labores tamen recensere & nimis longum foret & arduum, cum singula studio nostro persequi haud licuit. Hæc enim nostra historiola haud pro imaginarii historiam accipias velimus, sed tantummodo ut indicationem habeas, ex qua, quatenus studium nostrum hac in re processerit, videas, dijudicesque quid in nostra mox exponenda theoria exspectare liceat. Doleamus sane, quod haudquaquam scrutari licuit peculiaria de theoria imaginarii scripta, quæ ediderunt Cel. SUREMAIN DE MISSERI *6) atque ARGAND *7), quorum illud nuncquam, hoc vero non nisi obiter videre licuit. Merito vero hi celeberrimi viri, sicuti alii, theoriam imaginarii suis laboribus atque lucubrationibus dignam judicarunt, cum illius in unoquoque fere analyseos parte maximus sit usus, ideoque quam maxime necessarium sit, ut hæc ipsa theoria bene firmata solidisque superstructa sit fundamentis; idque eo magis, quo difficilius sit in exemplis concretis rem ipsam a posteriori comprobare. Si enim justis haud usus fueris regulis, vel ad singula rei momenta male adtenderis, sane fieri potest, ut gravioribus erroribus obnoxius sis; id, quod hac in re viris primi ordinis aliquamdiu accidit *8). Quare & nos hanc theoriam pertractandam credidimus.

---

nullius est momenti, cum $\frac{1}{2}L(x^2)$ loco Lx poni possit. D:nus vero VINCENT theoriam hujusmodi logarithmorum tradidit, moxque STEIN similem (in Gerg. An. Math. XV, vide Feruss. Bull. des Sc. Math. 1824 Nov., sub Num. 246), cujus fundamentum cum celeberrimo isto ab Eulero jam stabilito in totum & tantum convenit, sicuti & ille (in Gerg. An. XV, 1824 Dec., Num. 6. Ferruss. B. d. Sc. Math., 1825 Febr., Num. 110) mox confitetur, quamquam & se idem proprio marte invenisse & amplificasse indicat. Eadem occasione D:nus VINCENT exempla proposuit curvarum vere discretarum, quibus, ni fallimur, D:nus STEIN immerito continuitatem tribuit. Hujus vero rei postmodum amplior mentio erit.

*6) Théorie purement algébrique des quantités imaginaires; Paris 1801.

*7) Gerg. Annal. de Math., T. IV, p. 133-149.

*8) Hujus rei exemplum gravissimum est quæstio de potentiis functionum trigonometricarum, præsertim sinus & cosinus, secundum functiones arcuum multiplicium evolvendis. Hac in re & Cel. EULERUS & LA GRANGE errarunt, dum partim seriei terminum negligerunt imaginarium, partim ipsius seriei convergentiam conditionesque, quibus circumscribenda sit, haud determinarunt. Errorem primus observarit Cel. POISSON, medelamque proposuit. Deinde viri nullius non ordinis quasi acervatim hanc rem fusius

Imaginarium quamquam numeris exhiberi nequeat, tamen *nihil* non est, sed *ens* aliquod ut Philosophi dicunt *rationis* *9); idque ejusmodi, ut integram de quanto doctrinam, tametsi ipsum quantum non sit, pervagetur, vinculumque quasi constituat, quo diversissima illius capita colligantur. Ipsum & quanta diversæ indolis a se invicem sejungit & secernit. Medium aliquod est inter quale & quantum: ejus nempe quadratum $(i^2 = -1)$ ut & biquadratum $(i^2 = +1)$ quantum jam est. Ut vero in exemplo jam ex Geometria allato vidimus, imaginarium analytice exoritur, vel, quando id quod quæritur impossibile est, vel etiam quando ejus inveniendi caussa falsam ingressi fuerimus viam; tumque ejus theoria tam bene exposita desideratur, ut exinde tuto recta via retro monstretur. Hæcque ipsissima est *Analyseos Mathematicæ* elegantia atque præstantia, qua ceteris antecellit, quod sæpisse etiam problemata impossibilia, quamquam, ut par est, sub forma tam implicata, ut ipsa computari nequeat, dissolvat *50), quodque ei, qui, ipsa utens, viam rectam initio haud divinaverit, hanc, qua demum problema resolvere liceat, nihilominus commonstret. Hujus rei documento est exemplum ex Geometria modo propositum. — Unius cujusque fere problematis solutio unius alteriusue functionis ope exprimitur. Quoniam vero quantum, cujus quæsitum est functio, quodcumque esse potest; functio quæcunque quanti cujuscunque, ut analysis per se compleatur omnibusque casibus, alias seorsim pertractandis, generatim respondeat, postulanda est. Quamquam vero id, quod ita postulatur, generatim eadem exprimatur formula universali; tamen hac formula in istis casibus, quibus id quod quæritur

---

explicandam susceperunt, utut Déflers, Lacroix, Ohm, Poinsot, Plana, Olivier, Ettinghausen, Crelle, Berling, &c.; quorum labores iterum iterumque a plerisque susceptos postmodum fusius recensere a re alienum haud forsan erit, cum error ex male percepta vel potius neglecta imaginarii theoria maxima ex parte provenisse judicetur.

*9) Mont. l. c., p. 27.

*50) Eleganter Montucla (l. c., p. 28) dicit de ejusmodi quæstionibus, "qui impliquent contradiction par des conditions inconciliables": que fait alors la nature (consequent) ou la souveraine raison, qui a tout établi in numero, pondere & mensura? il falloit, qu'elle répondît, elle le fait, mais elle s'enveloppe dans une expression inexplicable, &c.